

Борсук В.В., Снарський А.О., Подласов С.О.

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Берестейський проспект, 37, Київ,
email: a.snarskii@gmail.com*

ЕФЕКТИВНА ПРОВІДНІСТЬ НА ПОРОЗІ ПРОТІКАННЯ

Анотація. У роботі розглядається задача визначення межі перколяційного переходу в квадратній двофазній решітці, що складається з металевих і діелектричних елементів, тобто таку мінімальну концентрацію металевих частин в решітці, при якій буде можливим протікання струму крізь усю решітку. Доведено, що критична концентрація провідної фази становить $p_c = 0,5$. Використовується метод, запропонований А. М. Дихне, який дозволяє отримати аналітичний вираз для ефективної провідності системи, в даному випадку в двофазній квадратній решітці.

Abstract. The paper deals with the problem of determining the percolation transition limit in a square two-phase lattice consisting of metallic and dielectric elements, the minimum concentration of metal parts in the grid at which it is possible to pass current through the entire grid. It is proved that the critical concentration of the conducting phase is $p_c = 0,5$. The method proposed by A.M. Dykhne is used to obtain an analytical expression for the effective conductivity of the system, in this case, in a two-phase square lattice.

Ключові слова: перколяційний перехід, квадратна решітка, ефективна провідність, критична концентрація, метод Дихне, фазовий перехід, неоднорідні середовища.

Keywords: percolation transition, square lattice, effective conductivity, critical concentration, Dykhne method, phase transition, inhomogeneous media.

Перколяційний перехід – це перехід, пов’язаний зі зміною зв’язності у системі. Перколяційні переходи досліджуються у фізиці, хімії, теорії складних мереж та інших галузях науки. Як і в теорії фазових переходів другого роду, більшість результатів у цій тематиці отримуються методами комп’ютерного моделювання. Лише поодинокі випадки дозволяють отримати точні аналітичні розв’язки, які мають особливу цінність, адже дають змогу перевірити точність і коректність чисельних розрахунків.

Один із таких рідкісних аналітичних результатів належить академіку А.М. Дихне, випускнику КПІ [1]. Він запропонував перетворення полів струму у двофазному провідному середовищі, що ґрунтується на симетрії: якщо фази мають різну питому провідність, але розташовані так, що їх взаємна заміна не впливає на ефективну провідність середовища, то можна точно визначити її значення.

Розв'язок Дихне для симетричної випадкової суміші

Однією із класичних моделей такого типу є двовимірне двофазне випадкове середовище, що складається з металевих та діелектричних елементів. Дихне отримав точний вираз для ефективної провідності такого середовища [2].

У цьому випадку межу провідності можна вважати $p_c = 0,5$ (частка металевих елементів в решітці). Рівняння Максвелла та матеріальні рівняння для постійних струмів і поля приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= 0, \text{div} \mathbf{J} = 0, \end{aligned}$$

де σ – провідність, яка є випадковою функцією координат (x, y) , яка приймає два значення σ_1 або σ_2 . Дихне вивів точний вираз для ефективної провідності:

$$\sigma_{ff} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2},$$

де ефективна провідність σ_{ff} це скаляр, оскільки система вважається ізотропною. Нас цікавить зв'язок між середньою густиною струму $\langle \vec{J} \rangle$ та середньою напруженістю електричного поля $\langle \vec{E} \rangle$. У провідному двовимірному двофазному середовищі справедливий закон Ома:

$$\langle \mathbf{J}(r) \rangle = \sigma_{ff} \langle \mathbf{E}(r) \rangle.$$

У випадкових двовимірних двофазних середовищах можливі симетричні заміни двох фаз, тобто $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$, випадком лише може бути $\sigma_1/\sigma_2 \rightarrow \infty$, [2] справедливим буде закон Ома і після цієї симетрії:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} [n \times \mathbf{E}], \\ \mathbf{E}' &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} [n \times \mathbf{j}], \end{aligned}$$

де n -одиничний вектор, отогональний до площини XY . Звичайно можливі зворотні перетворення, і, підставляючи в початкові формули, отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \sigma' \mathbf{E}', \\ \text{rot} \mathbf{E}' &= 0, \text{div} \mathbf{j}' = 0, \end{aligned}$$

$$\text{де } \sigma' = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma}.$$

Ці системи повністю еквівалентні із заміною функції σ на функцію σ' . Випадкова функція σ' приймає однакові два значення σ_1 і σ_2 , з тією лише різницею, що він приймає значення σ_1 в типу 2, тобто в тих місцях, де функція приймає значення σ_2 , і навпаки. Функція σ' приймає значення σ_2 , де функція σ приймає значення σ_1 . Оскільки ми припускали, що ці напрямки статистично еквівалентні, то система після усереднення повинна давати той же самий вираз закону Ома, що для початкової системи [1]:

$$\langle J' \rangle = \sigma_{ff} \langle E' \rangle,$$

то

$$\langle J' \rangle = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} [n \times \langle E \rangle] = \sigma_{ff} \langle E' \rangle = \frac{\sigma_{ff}}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} [n \times \langle J \rangle] = \frac{\sigma_{ff}^2}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} [n \times \langle E \rangle].$$

або ж

$$\sigma_{ff} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$$

Використовуючи цей підхід, можна визначити поріг протікання для таких систем.

Розглянемо трьохфазну систему, де перша і друга фази мають провідності $\sigma = \sigma_1$ і $\sigma = \sigma_2$, а третя $\sigma_{ff} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$. Якщо площі фаз 1 і 2 рівні, ефективна провідність системи теж дорівнює $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

У граничному випадку, коли σ_1 зростає до нескінченності, а σ_2 прямує до нуля, система переходить у двофазний стан. Якщо сумарна площа провідної фази перевищує 0.5, вся система стає провідною. Якщо ж добуток $\sigma_1 \sigma_2$ прямує до нуля, а концентрація провідної фази менша за 0.5, то система не проводить. Отже, критична концентрація $p_c = 0,5$ [2].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Snarskii, A. A. (2004). Effective conductivity of 2D macroscopic heterogeneous self-dual media. *Laser Physics*, 14(3), 337–343.
- [2] Снарський, А., Іванова, І., & Федотов, В. (2024). *Основи теорії неупорядкованих середовищ* (с. 75–85). КПІ.

