Авдєєва Т. В, Шевчук М. М.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, пр. Берестейський 37, email: *avdeeva.tetyana@gmail.com*

ПРОГРЕСІЯ В МИНУЛОМУ ТА В СЬОГОДЕННІ: ДЛЯ ЧОГО ВОНА ПЕРЕСІЧНОМУ ГРОМАДЯНИНУ?

Анотація. *Показано важливість арифметичної та геометричної прогресій у повсякденному житті та професійній діяльності людини, у розвитку науки, техніки. Історичний екскурс проілюстровано реальними задачами та прикладами із різними типами прогресій.*

Abstract. *The importance of arithmetic and geometric progression in everyday life and professional activity of a person, in the development of science and technology is shown. The historical excursion is demonstrated by real problems and examples with different types of progressions.*

Ключові слова: арифметична прогресія, геометрична прогресія, сума перших членів прогресії.

Key words: *arithmetic progression, geometric progression, sum of the first terms of the progression.*

Метою дослідження є показати природність виникнення прогресій, проаналізувати історичні задачі, які розв’язуються за їх допомогою. Підкреслити важливість арифметичної та геометричної прогресій у житті та діяльності пересічного громадянина, з’ясувати доцільність їх застосування у повсякденні.

Щороку подружжя відзначають черговий день одруження. Постійно з'являються флешки пам'яті з дедалі більшими обсягами: 4Г, 8Г,…, 512Г. Родина щомісяця відкладає 500 гривень, сподіваючись купити перед Новим роком пральну машину. Клієнт банку щороку отримує збільшення грошей по депозиту. Що поєднує всі ці приклади? В кожній ситуації ми маємо зміну «на певну величину» або «у кілька разів». Все це – прогресії.

Відомі зі школи означення арифметичної та геометричної прогресії та формули їх задання. Кожна арифметична прогресія має вигляд:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + d(n-1),$$

де a_1 −перший член, $d -$ різниця. Для геометричної прогресії

$$b_1,\ \ b_2 = b_1\mathrm{q},\ \ b_3 = b_2\mathrm{q} = b_1 q^2, \qquad b_4 = b_3\mathrm{q} = b_1\mathrm{q}^3, \dots,\ b_n = b_1\mathrm{q}^{\mathrm{n}-1},$$

b_1 є першим членом прогресії, q називають її знаменником.

Задачі, які призвели до появи прогресій з'являлися ще у давнину і були пов'язані із запитами повсякденного життя: розподіл продуктів, спадщини тощо.

У клинописних табличках вавилонян, як і в єгипетських папірусах (II тисячоліття до нашої ери), зустрічаються приклади арифметичної і геометричної прогресій. Так, із однієї клинописної таблички можна дізнатися, що, спостерігаючи за Місяцем, вавилоняни підмітили, що зростання Місячного диска відбувається за законом геометричної прогресії із знаменником 2, а у наступні 10 днів – за законом арифметичної прогресії з різницею 16 за перші 5 днів після нового місяця

Наведемо приклади відомих задач.

Задачі з єгипетського папірусу Ахмеса

1. Розподіл 100 мір ячменю між 5 людьми за умови різниці між мірами кожної людини та її сусіда дорівнює однаковій мірі.

2. У семи людей по сім кішок; кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім мір ячменю. Знайдіть числа цього ряду і їх суму?

3. Індійський правитель Шерам, щирий шанувальник гри в шахи, вирішив винагородити винахідника цієї гри, свого підданого Сету. Сету зажадав за першу клітину шахової дошки 1 зерно, за другу – двоє зерен, за третю – 4 зерна і т.д.. На превеликий жаль, Сету не зміг забрати свою винагороду, оскільки не знайдеться такого числа зерен на всій земній кулі. Що це за величезне число? Залишимо це питання не описаним, хоча відомий результат. [1]

Ще стародавні греки вміли обчислювати суми перших n парних або непарних чисел. Архімед у III столітті до н.е. застосовував прогресії для знаходження площ та об'ємів геометричних фігур, підкреслював, що вписані один в одного правильні трикутники утворюють геометричну прогресію. Формула суми членів арифметичної прогресії була отримана ще древньогрецьким вченим Діофантом. Формулу суми членів геометричної прогресії наведено в книзі Евкліда «Начала» (у III ст. до н.е.). Правило знаходження суми членів довільної арифметичної прогресії вперше зустрічається у роботі Леонардо Пізанського в «Книга абака» 1202р. Правило для суми скінченної геометричної прогресії зустрічається у книзі Н. Шюке «Наука про числа», яка побачила світ 1484 р. Лише у XVII ст., після виникнення поняття функції, інформацію стосовно прогресій було узагальнено та поставлено на науковий рівень, а в XVIII ст. в англійських підручниках з'явилися спеціальні позначення арифметичної та геометричної прогресій.

Цікавою є відома задача Магницького з арифметики. Чоловік продав коня за 156 рублів. Але покупець, отримавши коня, роздумав і повернув його продавцю, кажучи: «Немає мені користі купувати коня за ціну, що цих грошей не вартий». Тоді мудрий продавець запропонував інші умови продажу: «Якщо по-твоєму ціна коня висока, то купи його підковні цвяхи, а коня отримаєш тоді у подарунок. Цвяхів у кожній підкові 6. За перший цвях дай мені 1/4 коп., за другий – 1/2 коп., за третій – 1 коп. і т. д.» Покупець, спокушений низькою ціною, і бажаючи задарма отримати коня, погодився на умови продавця, розраховуючи, що за цвяхи доведеться сплатити не більше 10 рублів: $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+8\right)+(16+32+64+128+256+512)+(1024+2048+4096+8192+16384+32768)+(65536+131072+262144+524288+1048576+2097152)=4194303{,}75\ (\text{коп.})$. Насправді він переплатив більше ніж в 268 разів! [2]

Для розв'язування деяких задач із фізики, геометрії, біології, хімії, економіки, будівельної справи використовуються формули арифметичної та геометричної прогресій. Наприклад, у хімії, при підвищенні температури за арифметичною прогресією, швидкість хімічних реакцій зростає за геометричною прогресією. У фізиці нейтрон, ударом по ядру урану, розколює його на дві частини. Виходять 2 нейтрони, які, в свою чергу, б'ючи по двох ядрах, розколюють їх на дві частини (отримаємо вже 4 частини) і т.п., тобто маємо геометричну прогресію. Бамбук у вологих тропічних лісах в середньому за добу виростає на 75 см, тому можна легко обчислити вік рослини за її висотою.

Відомі задачі страхування життя або майна, кредити та депозити – це також питання, які пов'язані з прогресіями. Наприклад, вклади в банках збільшуються за схемами складних і простих відсотків. Акціонери банку теж мають багато питань, які напряму пов’язані з прогресіями: спроможність до кредитування банку, перенасичення ринку кредитами, збільшення прибутку банку тощо.

Розмноження бактерій поділом – зростаюча геометрична прогресія зі знаменником 2. Також геометричні прогресії виникають при створенні ліків та вакцин в фармацевтичній промисловості, в сільському господарстві при виготовлені силосу кормів для тварин, у природоохоронних заходах для очистки забрудненої води та ліквідації нафтових плям.

Відомою є задача використання суми перших n членів арифметичної прогресії для прийому ліків із збільшенням щоденно на 1 краплю до визначеної кількості, а потім послідовним зменшенням на 1 краплю для повного курсу лікування. Цікавою є задача розрахунку кількості еритроцитів у крові людини, що знаходиться на заданій висоті над рівнем моря, так як відомо про їх збільшення при підніманні вгору.

Двійковий код перетворив двійку та її ступеня на королеву прогресу, хоча всі дані, всі показники пам'яті гаджетів та швидкості інтернет-з'єднання є величезною геометричною прогресією.

Проведене дослідження, аналіз різноманітних задач підтвердили, що арифметичні та геометричні прогресії відігравали та продовжують відігравати важливу роль у повсякденному житті, розвитку науки та техніки, тому важливо не лише засвоїти формули прогресій, а вміти їх бачити у життєвих ситуаціях, навчитися розв’язувати задачі, які ставить перед нами саме життя. [3]

ЛІТЕРАТУРА

[1] Кушнір В., Ріжняк Р. Розв’язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп’ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.

[2] Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Системне моделювання процесу розв’язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.

[3] Послідовність. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія. Режим доступу:

[4] Послідовність. Арифметична прогресія. Геометрична прогресіяhttps://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/tema21.html